ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Α. Πεπερασμένες διαφορές

Εστω Δx δεδομένος πραγματικός αριθμός. Για τυχούσα συνάρτηση $f = f(x)$ ορίζουμε ως <u>διαφορά</u> (πρώτης τάξης) της $f(x)$ την συνάρτηση Δf με

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x)-f(x),$$

όπου αυτή ορίζεται.

π.χ. α) αν $\Delta x = \dfrac{1}{10}$ και $f(x) = \dfrac{1}{x}$, για $x\neq 0$, τότε

$$\Delta f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x(10x+1)}, \quad \text{για } x\notin\{0, -\frac{1}{10}\}.$$

β) αν $f(x)=c$ σταθερά, τότε $\Delta f(x) =c-c=0$.

γ) αν $f(x)=\alpha x +\beta$, τότε $\Delta f(x) = \alpha(x+\Delta x)+\beta-\alpha x-\beta = \alpha\Delta x$, (δηλ. η $\Delta f(x)$ είναι σταθερά).

Ως <u>διαφορά n-τάξεως</u> της $f(x)$, $n\geq 0$, ορίζουμε επαγωγικά την συνάρτηση

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1}(\Delta f(x))= \Delta^{n-1}\big(f(x+\Delta x)-f(x)\big),$$

όπου αυτή ορίζεται, θέτοντας $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x)$ και $\Delta^0 f(x) = f(x)$.

π.χ. α) αν $\Delta x = \dfrac{1}{100}$ και $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, τότε $\Delta^2 f(x) =$

$= \Delta(f(x+\Delta x)-f(x)) = f(x+2\Delta x)-f(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)+f(x) =$

$= f(x+2\Delta x)-2f(x+\Delta x)+f(x) =$

$$= \frac{1}{1+x+\frac{2}{100}} - 2\frac{1}{1+x+\frac{1}{100}} + \frac{1}{1+x},\ x \notin \left\{0, \frac{101}{100}, \frac{102}{100}\right\}.$$

β) αν $f(x)=x^2$ τότε $\Delta^2 f(x) = f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x)+$

$+ f(x)= (x+2\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x)^2+x^2 = 2\Delta x^2$, και

$\Delta^3 f(x) = \Delta(2\Delta x^2) = 2\Delta x^2 - 2\Delta x^2 = 0.$

γ) $\Delta^2 (x^3) = (x+2\Delta x)^3 - 2(x+\Delta x)^3+x^3 = \ldots = 6\Delta x^3 + 6x\Delta x^2.$

(Προσοχή: με Δx^n θα εννοούμε το $(\Delta x)^n$ και όχι το $\Delta(x^n)$).

<u>Πρόταση.</u> Εστω ότι η f(x) έχει n-στη παράγωγο $f^{(n)}(x)$ στο x, τότε

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n}.$$

<u>Απ.</u> Για n=1 η πρόταση είναι άμεση, από τον ορισμό της παραγώγου.

Για $n \geq 2$, θα δείξουμε μόνο την περίπτωση n=2:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{\Delta x^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h)}{2h} \quad \text{(κανόνας του L' Hospital)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f'(x+2h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x) - f'(x+h)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} 2\,\frac{f'(x+2h) - f'(x)}{2h} - \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = 2f''(x) - f''(x)$$

$= \quad f''(x).$ □

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να προσεγγίσουμε την n-στη παράγωγο μιας συνάρτησης f(x) με χρήση της διαφοράς n-τάξης:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} \approx \frac{\Delta^n f(x)}{\Delta x^n},$$

όπου η προσέγγιση είναι καλύτερη όσο πιο μικρό είναι το Δx.

π.χ. Αν $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ και $\Delta x = \dfrac{1}{1000}$, τότε μπορούμε

να διαπιστώσουμε ότι $f''(\frac{1}{2}) \approx \dfrac{\Delta^2 f(\frac{1}{2})}{\Delta x^2}$. Πράγματι:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f''(\frac{1}{2}) = 2 \cdot 8 = 16,$$

και $$\frac{\Delta^2 f(\frac{1}{2})}{\Delta x^2} = 1000^2((f(\frac{1}{2}+\frac{2}{1000}) - 2f(\frac{1}{2}+\frac{1}{1000}) + f(\frac{1}{2}))$$

$$= 1000^3(\frac{1}{498} - \frac{2}{499} + \frac{1}{500}) = 16{,}096\ldots.$$

Έτσι, μια διαφορική εξίσωση, όπου παρουσιάζεται η άγνωστη συνάρτηση y = y(x), μπορούμε να την προσεγγίσουμε με μία εξίσωση όπου αντί παραγώγους θα εμφανίζονται διαφορές. Αν θέλουμε δε να προσεγγίσουμε τα $y_n = y(n\Delta x)$, n=0, 1, 2,…, και όχι όλη τη συνάρτηση y, τότε η διαφορική εξίσωση ανάγεται στην εύρεση μιας ακολουθίας y_n που ικανοποιεί μία εξίσωση.

π.χ. η διαφορική εξίσωση $y'' + xy' = x^2$ προσεγγίζεται από την

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} + x\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^2.$$

Επειδή $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ και

$\Delta^2 y = y(x+2\Delta x) - 2y(x+\Delta x) + y(x)$,

αν $x = n\Delta x$, τότε

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n$$

$$\Delta^2 y = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Οπότε, για την εύρεση των y_n, αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{\Delta x^2} + n\Delta x \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta x} = n^2 \Delta x^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n + n(y_{n+1} - y_n)\Delta x^2 = n^2 \Delta x^4.$$

Προφανώς, για την λύση της προηγούμενης εξίσωσης, πρέπει να έχει ορισθεί το Δx.

<u>Πρόταση.</u> Ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

α) $\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$

β) $\Delta^n(\alpha f(x) = \alpha \Delta^n f(x)$

γ) $\Delta^n(f(x)+g(x) = \Delta^n f(x) + \Delta^n g(x)$.

<u>Απ</u>. α) Για n=1 ισχύει. Εστω ότι ισχύει για $n=m\geq 1$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για n=m+1:

$\Delta^{m+1} f(x) = \Delta^m(\Delta f(x)) = \Delta(\Delta^{m-1}(\Delta f(x))) = \Delta(\Delta^m f(x))$.

β) $\Delta^n(\alpha f(x)) = \Delta^{n-1}(\Delta\ \alpha f(x)) = \Delta^{n-1}\ (\alpha f(x+\Delta x) - \alpha f(x)) =$

$= \Delta^{n-1}(\alpha(\Delta f(x))) = \ldots = \alpha \Delta^n f(x)$.

γ) Απλό. □

<u>Πρόταση.</u> Αν $y_n = y(n\Delta x)$, για n = 0,1,2,…, τότε

$$y_{n+m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \Delta^k y_n ,$$

για κάθε m = 0,1,2….

(Όπου $\binom{m}{k} = \dfrac{m!}{(m-k)!k!}$, με $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots m$, αν $m \geq 1$, και $0! = 1$).

Απ. Για m = 0 είναι προφανής.

Έστω ότι ισχύει για m = λ. Θα δείξουμε ότι ισχύει για m = λ+1.

Έχουμε $y_{n+\lambda+1} = \Delta y_{n+\lambda} + y_{n+\lambda} = \Delta(\sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{k}\Delta^k y_n) + \sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{k}\Delta^k y =$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{k}\Delta^{k+1} y_n + \sum_{k=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{k}\Delta^k y_n = \sum_{k=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{k-1}\Delta^k y_n + \binom{\lambda}{\lambda}\Delta^{\lambda+1} y_n + \sum_{k=1}^{\lambda}\binom{\lambda}{k}\Delta^k y_n + \binom{\lambda}{0} y_n =$$

$$= \binom{\lambda+1}{0} y_n + \sum_{k=1}^{\lambda}(\binom{\lambda}{k-1} + \binom{\lambda}{k})\Delta^k y_n + \binom{\lambda+1}{\lambda+1}\Delta^{\lambda+1} y_n .$$

Αλλά $\binom{\lambda}{k-1} + \binom{\lambda}{k} = \binom{\lambda+1}{k}$, (η απόδειξη εύκολη).

Άρα $y_{n+\lambda+1} = \sum_{k=0}^{\lambda+1}\binom{\lambda}{k}\Delta^k y_n$. □

Πρόταση. Αν $y_n = y(n\Delta x)$, για n = 0, 1, 2, …, τότε $\Delta^k y_n = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k+i} y_{n+i}$.

Απ. Για k = 0 προφανώς ισχύει. Έστω ότι ισχύει για k = λ.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για k = λ+ 1:

$$\Delta^{\lambda+1} y_n = \Delta^{\lambda}(\Delta y_n) = \sum_{i=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{i}(-1)^{\lambda+i}\Delta y_{n+i} = \sum_{i=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{i}(-1)^{\lambda+i}(y_{n+i+1} - y_{n+i}) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{i}(-1)^{\lambda+i} y_{n+i+1} - \sum_{i=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{i}(-1)^{\lambda+i} y_{n+i} =$$

$$= -\sum_{i=0}^{\lambda}\binom{\lambda}{i}(-1)^{\lambda+i+1} y_{n+i+1} - \sum_{i=0}^{\lambda-1}\binom{\lambda}{i+1}(-1)^{\lambda+i+1} y_{n+i+1} - (-1)^{\lambda} y_n =$$

$$= -(-1)^{2\lambda+1} y_{n+\lambda+1} - \sum_{i=0}^{\lambda-1}(\binom{\lambda}{i} + \binom{\lambda}{i+1})(-1)^{\lambda+i+1} y_{n+i+1} - (-1)^{\lambda} y_n =$$

$$= y_{n+\lambda+1} - \sum_{i=0}^{\lambda-1}\binom{\lambda+1}{i+1}(-1)^{\lambda+i+1} y_{n+i+1} + (-1)^{\lambda+1} y_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{\lambda+1}\binom{\lambda+1}{i}(-1)^{\lambda+i+1} y_{n+i} .$$ □

Η προτελευταία πρόταση δείχνει ότι αν μια ακολουθία y_n ικανοποιεί μία εξίσωση, τότε η y_n προσεγγίζεται από μία συνάρτηση $y(x)$ (με $y_n = y(n\Delta x)$) που είναι λύση μιας διαφορικής εξίσωσης, κατά τον τρόπο που έχουμε περιγράψει:

π.χ. η $y_{n+2}+ny_{n+1}= n+1$ μπορεί να γραφεί

$$\binom{2}{0}\Delta^0 y_n + \binom{2}{1}\Delta^1 y_n + \binom{2}{2}\Delta^2 y_n + n\left(\binom{1}{0}\Delta^0 y_n + \binom{1}{1}\Delta^1 y_n\right) = n+1 \Leftrightarrow$$

$$y_n+2\Delta y_n + \Delta^2 y_n + ny_n + n\Delta y_n = n+1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\Delta^2 y_n}{\Delta x^2} + \frac{(n+2)}{\Delta x}\ \frac{\Delta y_n}{\Delta x} + \frac{n+1}{\Delta x^2} y_n = \frac{n+1}{\Delta x^2}.$$

Η τελευταία εξίσωση, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προέρχεται από τη διαφορική εξίσωση

$$y'' + \left(\frac{x}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta x}\right)y' + \left(\frac{x}{\Delta x^3} + \frac{1}{\Delta x^2}\right)y = \frac{x}{\Delta x^3} + \frac{1}{\Delta x^2},$$

θέτοντας $x=n\Delta x$, $y(n\Delta x)=y_n$.

Αυτό δικαιολογεί γιατί η μέθοδος λύσης μιας εξίσωσης που ικανοποιεί μια ακολουθία, μπορεί να μοιάζει με την μέθοδο λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης.

Επίσης, η τελευταία πρόταση, δείχνει ότι η εξίσωση που ικανοποιούν οι διαφορές μιας ακολουθίας y_n είναι ισοδύναμη με μία εξίσωση που ικανοποιούν οι όροι της ακολουθίας y_n.

π.χ. η εξίσωση $\Delta^2 y_n + \Delta^5 y_n = n\ \Delta y_n$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$y_{n+2} - 2\,y_{n+1} + y_n + \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i}(-1)^{5+i} y_{n+i} = n(y_{n+1} + y_n).$$

Έτσι εξηγείται γιατί ονομάζουμε στη συνέχεια εξίσωση διαφορών την εξίσωση που ικανοποιείται από μία ακολουθία.

B. Εξισώσεις διαφορών

Εξίσωση διαφορών ονομάζεται η εξίσωση που ικανοποιείται από τους όρους μιας ακολουθίας y_n, για $n = 0, 1, 2, \ldots$.

π.χ. η εξίσωση διαφορών $(y_{n+1})^2 - (y_n)^2 = 0$.

Μια ακολουθία α_n θα λέγεται λύση της εξίσωσης διαφορών αν την ικανοποιεί

π.χ. η ακολουθία $\alpha_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ είναι λύση της $y_{n+2} - y_n = 0$ (αποδείξτε το).

Το σύνολο των λύσεων μια εξίσωσης διαφορών θα το λέμε γενική λύση.

π.χ. η εξίσωση $y_{n+1} - 2y_n = 0$ έχει γενική λύση την $y_n = 2^n c$, όπου c αυθαίρετη σταθερά (αποδείξτε το).

Τάξη μιας εξίσωσης διαφορών λέμε την διαφορά μεταξύ του μεγαλύτερου και του μικρότερου μη σταθερού δείκτη της άγνωστης ακολουθίας

π.χ. η εξίσωση $(y_{n+4})^{n+10}.y_{n+5}+(y_{n+1})^3=n^n y_0$ έχει τάξη (n+5)-(n+1)=4.

Μία εξίσωση διαφορών λέγεται γραμμική αν είναι της μορφής

$$s_0 y_{n+k} + s_1 y_{n+k-1} + \ldots + s_k y_n = d_n \qquad (1)$$

όπου τα $s_0, s_1, \ldots, s_k$ και η ακολουθία d_n είναι δεδομένα.

Αν $d_n=0$ σταθερή, τότε η (1) γίνεται

$$s_0 y_{n+k} + s_1 y_{n+k-1} + \ldots + s_k y_n = 0 \qquad (2)$$

και λέγεται ομογενής, λέμε δε ότι η (2) είναι η αντίστοιχη ομογενής της (1).

π.χ. η $y_{n+8} + 8y_{n+7} + y_n = ημn$ είναι γραμμική με αντίστοιχη ομογενή την

$y_{n+8} + 8y_{n+7} + y_n = 0$.

<u>Πρόταση.</u> Έστω $α_n$ λύση της μη ομογενούς (1) και $β_n$ λύση της αντίστοιχης ομογενούς (2), τότε η $α_n + β_n$ είναι λύση της μη ομογενούς (1).

<u>Απ.</u> Εύκολη. □

π.χ. η $α_n = 2^n - \frac{1}{3}$ είναι λύση της $y_{n+2} - 4y_n = 1$ και η $β_n = (-2)^n$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς (επαληθεύστε). Άρα και η $y_n = (-2)^n + 2^n - \frac{1}{3}$ είναι λύση της $y_{n+2} - 4y_n = 1$.

<u>Πρόταση</u> Έστω $α_n$ λύση της μη ομογενούς (1). Τότε για την τυχούσα λύση y_n της (1) υπάρχει λύση $β_n$ της αντίστοιχης ομογενούς (2) έτσι ώστε $y_n = α_n + β_n$.

<u>Απ.</u> Αρκεί να δούμε ότι η $β_n = -α_n + y_n$ είναι λύση της (2). □

<u>Πόρισμα.</u> Για να βρούμε την γενική λύση της (1) αρκεί να βρούμε μία λύση της καθώς και την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς (2) και να τις αθροίσουμε.

<u>Απ.</u> Άμεσο, λόγω των προηγουμένων. □

π.χ. η γενική λύση της $y_{n+1} - 3y_n = 0$ είναι $α_n = c3^n$, c σταθερά, και μία λύση της $y_{n+1} - 3y_n = n$ είναι η $β_n = -\frac{1}{4} - \frac{n}{2}$. Άρα η γενική λύση της $y_{n+1} - 3y_n = n$ είναι $y_n = c3^n - \frac{1}{4} - \frac{n}{2}$, c σταθερά.

Πρόταση. Έστω λ ακολουθίες $y_{1,n}, y_{2,n},\ldots, y_{\lambda,n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) που είναι λύσεις της ομογενούς (2). Τότε και η $y_n = c_1y_{1,n} + c_2y_{2,n} + \ldots + c_\lambda y_{\lambda,n}$ είναι λύση της (2), όπου c_1, $c_2, \ldots, c_\lambda$ σταθερές.

Απ. Εύκολη. □

π.χ. οι $\alpha_n=3^n$ και $\beta_n=(-3)^n$ είναι λύσεις της $y_{n+2}-9y_n = 0$, άρα και η $y_n = c_1 3^n +$ $+ c_2 (-3)^n$ είναι λύση, για τυχούσες σταθερές c_1, c_2.

Η εξίσωση $s_0\lambda^k + s_1\lambda^{k-1}+\ldots+ s_k = 0$ λέγεται χαρακτηριστική εξίσωση της (2).

π.χ. η χαρακτηριστική εξίσωση της $7y_{n+5}-2y_{n+3}+y_n=0$ είναι $7\lambda^5-2\lambda^3+1=0$.

Πρόταση. Έστω λ_0 ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ομογενούς (2). Τότε:

α) Αν $\lambda_0 \in R$, η λ_0^n είναι λύση της (2).

β) Αν $\lambda_0=x+iy$ μιγαδικός (i φανταστική μονάδα, $x,y \in R$), οι ρ^nσυν(nφ), ρ^nημ(nφ) είναι λύσεις της (2), όπου $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=$Τοξ συν $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, (οπότε $x+iy =$ ρ(συνφ+iημφ)).

Απ. Έχουμε $s_0\lambda_0^k +s_1\lambda_0^{k-1}+\ldots+ s_k = 0 \Rightarrow s_0\lambda_0^{n+k} +s_1\lambda_0^{n+k-1}+\ldots+ s_k\lambda_0^n = 0$.

α) Αν το λ_0 είναι πραγματικός τότε η τελευταία ισότητα λεει ότι λ_0^n είναι λύση της ομογενούς (2).

β) Αν $\lambda_0=\rho$(συνφ+iημφ) τότε $\lambda_0^n =\rho^n$(συν(nφ)+iημ(nφ)), οπότε

$s_0\rho^{n+k}$ (συν((n+k)φ) + iημ((n+k)φ)) +…+ $s_k\rho^n$(συν(nφ) + iημ(nφ)) = 0 ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} s_0\rho^{n+k}\text{συν}((n+k)\varphi)+s_1\rho^{n+k-1}\text{συν}((n+k-1)\varphi)+\ldots+s_k\rho^n\text{συν}(n\varphi)=0 \\ s_0\rho^{n+k}\text{ημ}((n+k)\varphi)+s_1\rho^{n+k-1}\text{ημ}((n+k-1)\varphi)+\ldots+s_k\rho^n\text{ημ}(n\varphi)=0. \end{cases}$$

Οι τελευταίες ισότητες λένε ότι οι ρ^ησυν(nφ), ρ^ηημ(nφ) είναι λύσεις της (2). □

π.χ. α) η χαρακτηριστική εξίσωση της y_{n+5}-$2y_{n+2}$=0 είναι λ^5-$2\lambda^2$=0 που έχει λύση την $\lambda_0=\sqrt[3]{2}$. Άρα η $y_n=2^{n/3}$ είναι λύση της y_{n+5}-$2y_{n+2}$=0.

β) η χαρακτηριστική εξίσωση της $y_{n+3}+8y_n=0$ είναι $\lambda^3+8=0$ που έχει λύση την $\lambda_0=2(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}+i\eta\mu\frac{\pi}{3})$. Άρα οι $2^n\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{3}, 2^n\eta\mu\frac{n\pi}{3}$ είναι λύσεις της $y_{n+3}+8y_n=0$.

Πρόταση. Έστω ότι το λ_0 είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ομογενούς (2), με πολλαπλότητα p. Τότε και οι ακολουθίες λ_0^n, $n\lambda^n, n^2\lambda^n,\ldots,n^{p-1}\lambda^n$ είναι λύσεις.

Απ. Θα το αποδείξουμε για την περίπτωση p=2.

Θέτουμε $q(\lambda)=s_0\lambda^\kappa+s_1\lambda^{\kappa-1}+\ldots+s_\kappa$. Επειδή το λ_0 είναι ρίζα της $q(\lambda)=0$ με πολλαπλότητα 2, θα είναι $q(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^2w(\lambda)$, όπου $w(\lambda)$ πολυώνυμο του λ.

Έχουμε $q'(\lambda)=2(\lambda-\lambda_0)w(\lambda)+(\lambda-\lambda_0)^2w'(\lambda)$, οπότε $q'(\lambda_0)=0$.

Αλλά $q'(\lambda)=s_0k\lambda^{\kappa-1}+s_1(k-1)\lambda^{k-2}+\ldots+s_{k-1}$. Άρα $s_0k\lambda_0^{k-1}+s_1(k-1)\lambda_0^{k-2}+\ldots+s_{k-1}=0$,

οπότε $s_0k\lambda_0^{n+k}+s_1(k-1)\lambda_0^{n+k}+\ldots+s_{k-1}\lambda_0^{n+1}=0$.

Αλλά $s_0\lambda_0^{n+k}+s_1\lambda_0^{n+\kappa-1}+\ldots+s_k\lambda_0^n=0$, επειδή η λ_0^n είναι λύση της (2).

Οι δύο τελευταίες ισότητες δίνουν

$$s_0(n+k)\lambda_0^{n+k}+s_1(n+k-1)\lambda_0^{n+k-1}+\ldots+s_{k-1}(n+1)\lambda_0^{n+1}+s_kn\lambda_0^n=0.$$

Αυτό σημαίνει ότι και η $n\lambda_0^n$ είναι λύση της (2). □

π.χ. η χαρακτηριστική εξίσωση της $y_{n+3}-3y_{n+2}+3y_{n+1}-y_n=0$ είναι $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^3=1$ που έχει ρίζα $\lambda_0=1$ με πολλαπλότητα 3. Άρα οι ακολουθίες $\alpha_n=1^n=1$ (σταθερή), $\beta_n=n1^n=n$, και $\gamma_n=n^21^n=n^2$, είναι λύσεις.

Θεώρημα. Έστω $s_0 s_k \neq 0$, τότε η ομογενής (2) είναι τάξης k και έχει k λύσεις $y_{1,n}$, $y_{2,n}$, …, $y_{k,n}$ γραμμικά ανεξάρτητες (δηλαδή αν $x_1y_{1,n}+x_2 y_{2,n}+ \ldots +x_ky_{k,n} =0$, για κάθε n, τότε $x_1 = x_2 =\ldots= x_k = 0$). Οπότε η γενική λύση της (2) είναι

$$y_n = c_1y_{1,n}+c_2y_{2,n}+ \ldots +c_ky_{k,n}$$

όπου $c_1, c_2,\ldots, c_k$ αυθαίρετες σταθερές.

Απ. Παραλείπεται. □

π.χ. η $y_{n+2}+y_n = 0$ έχει λύσεις τις ακολουθίες $\alpha_n =$ συν $\frac{n\pi}{2}$, $\beta_n =$ ημ$\frac{n\pi}{2}$,

(επαληθεύστε το) οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες:

αν xσυν $\frac{n\pi}{2}$ + yημ$\frac{n\pi}{2}$ = 0 για κάθε n, τότε

$x = 0$ (για $n = 0$) και $y = 0$ (για $n = 1$).

Αρα η γενική λύση της δεύτερης τάξης εξίσωσης $y_{n+2}+y_n = 0$

είναι $y_n = c_1$συν $\frac{n\pi}{2}$ $+c_2$ημ$\frac{n\pi}{2}$.

Πόρισμα Η ομογενής εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης

$$s_0y_{n+2}+s_1y_{n+1}+s_2y_n = 0 \text{ (με } s_0s_2 \neq 0),$$

έχει γενική λύση:

α) $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο διαφορετικές πραγματικές λύσεις λ_1,λ_2.

β) $y_n = c_1\lambda_0^n + c_2 n\lambda_0^n$, αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα λ_0.

γ) $y_n = c_1\rho^n$συν$(n\varphi)$ $+c_0\rho^n$ημ $(n\varphi)$, αν η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μιγαδικές ρίζες $x \pm iy$, όπου $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ και $\varphi =$ Τοξ συν$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, δηλ. $x \pm iy =\rho$(συνφ ±iημφ).

Απ. Λόγω των προηγουμένων, αρκεί να εξεταστεί ότι:

στην περίπτωση α) οι λ_1^n, λ_2^n είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

» » β) οι λ_0^n, $n\lambda_0^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

» » γ) οι ρ^nσυν(nφ), ρ^nημ(nφ) είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Θα εξετάσουμε μόνο την περίπτωση α), (τις άλλες δείτε τις μόνοι).

Εστω $x\lambda_1^n + y\lambda_2^n = 0$ για κάθε n. Για να δείξουμε ότι $x = y = 0$, αρκεί να υποθέσουμε $y \neq 0$ και να φτάσουμε σε άτοπο.

Αν $y \neq 0$ τότε $\lambda_2^n = -\frac{x}{y}\lambda_1^n$. Οπότε

$$s_0(\lambda_1)^2 + s_1\lambda_1 + s_2 = 0 \text{ και}$$

$$s_0\frac{-x}{y}\lambda_1^2 + s_1\frac{-x}{y}\lambda_1 + s_2 = 0.$$

Συνεπώς $\frac{x}{y}s_2 + s_2 = 0$, άρα $x = -y$, οπότε $\lambda_1^n = \lambda_2^n$, άρα $\lambda_1 = \lambda_2$, άτοπο. □

π.χ. α) Η εξίσωση $y_{n+2} - 2y_n = 0$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$. Άρα η γενική λύση είναι

$$y_n = c_1(\sqrt{2})^n + c_2(-\sqrt{2})^n.$$

β) Η εξίσωση $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2 = 0$ που έχει μία διπλή ρίζα $\lambda_0 = 2$. Αρα η γενική λύση είναι

$$y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n.$$

γ) Η εξίσωση $y_{n+2} + 4y_n = 0$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2i$.

Είναι δε $2i = 2(\text{συν}\frac{\pi}{2} + i\text{ημ}\frac{\pi}{2})$. Αρα η γενική λύση είναι

$$y_n = c_1 2^n \text{ συν}\frac{n\pi}{2} + c_2 2^n \text{ ημ}\frac{n\pi}{2}.$$

Πρόταση. Η μη ομογενής (1) έχει μία τουλάχιστον λύση y_n που είναι ή της μορφής του όρου d_n, όπως στον πίνακα:

d_n	y_n
αx^n	βx^n
αn^k	$\beta_0 + \beta_1 n + \ldots + \beta_k n^k$
ημ(αn) ή συν(αn)	β_1ημ(nα)+β_2συν(nα)

ή είναι πολλαπλάσιο αυτής της μορφής με κάποιο από τα $n, n^2, n^3, \ldots$.

Απ. Παραλείπεται. □

π.χ. α) η $y_{n+2} - 2y_n = 2\cdot 3^n$ έχει λύση της μορφής $y_n = \beta 3^n$:

$\beta 3^{n+2} - 2\beta 3^n = 2\cdot 3^n \Leftrightarrow 9\beta - 2\beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{2}{7}$.

Άρα μια λύση είναι $y_n = \frac{2}{7} 3^n$.

β) η $y_{n+2} - 2y_n = -n$ έχει λύση της μορφής $y_n = \alpha + \beta n$:

$\alpha + \beta(n+2) - 2(\alpha + \beta n) = -n \Leftrightarrow -\beta n - \alpha + 2\beta = -n \Leftrightarrow \beta = 1$ και $\alpha = 2$.

Άρα μία λύση είναι $y_n = 2+n$.

γ) η εξίσωση $y_{n+3} + 3y_{n+2} + 3y_{n+1} + y_n = (-1)^n$ έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^3 = 0$ που έχει ρίζα $\lambda_0 = -1$ με πολλαπλότητα 3. Άρα οι $(-1)^n$, $n(-1)^n$, $n^2(-1)^n$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. Αναζητάμε λύση της μορφής

$$y_n = \alpha(-1)^n$$

$$y_n = \alpha n(-1)^n$$

$$y_n = \alpha n^2 (-1)^n$$

$$y_n = \alpha n^3 (-1)^n$$

…………..

Προφανώς οι τρεις πρώτες δεν δίνουν λύση (γιατί;). Άρα εξετάζουμε τη μορφή $y_n = \alpha n^3 (-1)^n$:

$\alpha(n+3)^3(-1)^{n+3}+\alpha 3(n+2)^3(-1)^{n+2}+\alpha 3(n+1)^3(-1)^{n+1}+\alpha n^3(-1)^n = (-1)^n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha(0n^3 + 0n^2 + 0n - 6) = 1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{6}$. Συνεπώς η $y_n = -\frac{1}{6} n^3(-1)^n$ είναι λύση.

<u>Παράδειγμα</u>

Να λυθεί η $y_{n+2}-y_n=n^2$.

<u>Απ.</u> Πρώτα λύνουμε την αντίστοιχη ομογενή $y_{n+2}-y_n=0$. Αυτή έχει χαρακτηριστική εξίσωση $\lambda^2-1=0 \Leftrightarrow \lambda\pm1$. Αρα η $\alpha_n=c_1 1^n+c_2(-1)^n=c_1+c_2(-1)^n$ είναι η γενική λύση της ομογενούς. Αναζητάμε λύση της μη ομογενούς:

Πρώτα εξετάζουμε λύση της μορφής $y_n=\alpha+\beta n+\gamma n^2$:

$$\alpha+\beta(n+2)+\gamma(n+2)^2-(\alpha+\beta n+\gamma n^2) = n^2 \Leftrightarrow$$

$$0n^2 +4\gamma n +2\beta+4\gamma=n^2 \text{ (αδύνατο).}$$

Εν συνεχεία αναζητάμε λύση της μορφής $y_n=n(\alpha+\beta n+\gamma n^2)$:

$$\alpha(n+2)+\beta(n+2)^2+\gamma(n+2)^3-(\alpha n+\beta n^2+\gamma n^3) =n^2 \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 6\gamma = 1 \\ 4\beta + 12\gamma = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 8\gamma = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \gamma = 1/6 \\ \beta = -1/2 \\ \alpha = 1/3. \end{array}\right.$$

Άρα η μη ομογενή έχει λύση την

$$\beta_n = n(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}n^2).$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$y_n = \alpha_n+\beta_n = c_1+c_2(-1)^n + n(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{6}n^2). \qquad \square$$

Προβλήματα

1) Ζητείται να βρεθεί η τιμή p_n, η παραγόμενη ποσότητα q_n και η ποσότητα ζήτησης w_n ενός προϊόντος την χρονική περίοδο n, όταν:

α) $w_n = 18 – 3p_n$ (η ζήτηση εξαρτάται από την τιμή).

β) $q_n = -3 + 4p_{n-1}$ (η παραγωγή εξαρτάται από την τιμή της προηγούμενης περιόδου).

γ) $w_n = q_n$ (πωλείται όλη η παραγωγή)

δ) $q_1 = 10$ (η αρχική παραγόμενη ποσότητα είναι 10 μονάδες).

2) Για το εθνικό εισόδημα y_n της n-περιόδου, ισχύει η εξίσωση $y_n – 2\alpha y_{n-1} + \alpha y_{n-2} = \beta$, όπου $0<\alpha<1$, β σταθερές. Να λυθεί η εξίσωση για $\alpha = ½$ και να βρεθεί το οριακό εθνικό εισόδημα όταν το n τείνει στο άπειρο.

3) Ένα χρέος με επιτόκιο α % ξεπληρώνεται με ετήσιες δόσεις R ευρώ και στο k έτος το υπόλοιπο P_k του χρέους ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών $P_{k+1} =(1 + \alpha)P_k – R$.
Αν το αρχικό χρέος ήταν $P_o = A$, δείξτε ότι $P_k = A(1 +\alpha)^k – R(1 + \alpha)^k/\alpha + R/\alpha$.

4) Για τον πληθυσμό y_n του έτους n , ενός είδους ζώου που κινδυνεύει με εξαφάνιση από ένα νησί, ισχύει η εξίσωση $y_n - \alpha y_{n-1} = \beta$, όπου $0<\alpha<1$ σταθερά και β ο αριθμός των ζώων που μεταφέρονται κάθε έτος στο νησί προκειμένου να ενισχυθεί ο πληθυσμός τους. Να βρεθεί ο οριακός πληθυσμός $\lim_{n \to +\infty} y_n$ που τείνει να δημιουργηθεί.

5) Σε μία αναδασωτέα περιοχή φυτεύονται κάθε χρόνο 1000 δενδρύλλια, ενώ κάθε χρόνο διαπιστώνεται ότι το 1/20 από τα φυτευμένα δένδρα των προηγούμενων ετών καταστρέφεται. α) Βρείτε τον αριθμό y_n των δένδρων που προέρχονται από την δενδροφύτευση μετά από n χρόνια. β) Βρείτε τον αριθμό X των δένδρων που τείνει να αποκτήσει η περιοχή.